INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2,
Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală – 11 februarie 2012

Clasa a IX-a - Bareme

1). Să se calculze suma $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{4k^4+1}$ **şi să se demonstreze rezultatul prin inducție matematică.**

selecție prof. Opriş Adonia

<u>Soluție:</u>

Se obține $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{4k^4+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{(2k^2-2k+1)(2k^2-2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2k^2+2k+1}\right)$.....3*p*

Deci $S=1-\frac{1}{2n^2+2n+1}=\frac{2n(n+1)}{2n^2+2n+1}$ *1p*

Etapa de verificare a inducției matematice...................................*1p*

Etapa de demonstrație a inducției matematice..............................*2p*

2). Dacă M este punctul de intersecție a dreptelor care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului $ABCD$, arătați că pentru orice punct O din planul patrulaterului are loc:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}.$$

Selectată de prof. Fărcaş Nicolae din Culegere de probl. de matem.
Mate 2000+, Ed. Paralela 45

Barem de corectare:

Fie S mijlocul lui BC $\Rightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OS}$;

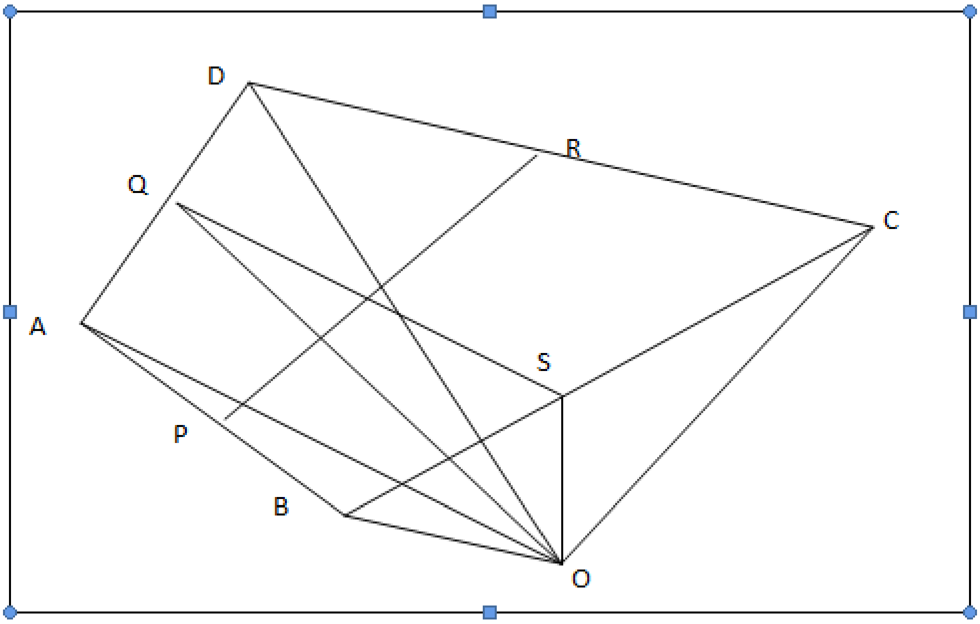
Fie Q mijlocul lui AD $\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OQ}$. (3p)

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2(\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OQ})$ (1p)

RS linie mijlocie în triunghiul BCD şi QP linie mijlocie în triunghiul ADB (2p) $\Rightarrow \begin{cases} PQ \parallel BD \\ RS \parallel BD \end{cases}$ şi

$$PQ = RS = \frac{BD}{2} \Rightarrow \; PQRS \text{ paralelogram}$$

$$\Rightarrow MQ = MS \quad \Rightarrow \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OM} \quad \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OM} \qquad \text{(1p)}$$



3). a) Să se arate că $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, $\forall x \in \Re$

b) Să se calculeze expresia:

$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[\frac{n+4}{8}\right] + \ldots + \left[\frac{n+1024}{2048}\right]$, unde $n \in \mathbf{N}$.

Selectată şi prelucrată de prof. Zay Éva din Matematică pentru grupele de performanţă Ed Dacia Educaţional, Cluj Napoca, 2004

Barem de corectare:

a) Demonstrarea egalităţii (2p)

b) Scriem suma sub altă formă:

$$\left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{n}{8} + \frac{1}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2048} + \frac{1}{2}\right] \qquad \text{(1p)}$$

Din relația lui Hermite:

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x] \quad , \text{ avem: } \left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x] \qquad (2p)$$

Aplicăm la transcrierea sumei de calculat:

$$\left([n]-\left[\frac{n}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{n}{8}\right]\right)+...+\left(\left[\frac{n}{2048}\right]-\left[\frac{n}{2048}\right]\right)=[n]=n \qquad (2p)$$

4). Fie a,b,c>0 astfel încât ab+bc+ca=1.

Demonstrați că:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\sqrt{3}+\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}.$$

Barem de corectare:

Inegalitatea se mai poate scrie:

$$\frac{1-ab}{a+b}+\frac{1-bc}{b+c}+\frac{1-ca}{c+a}\geq\sqrt{3}$$ ……………………………………….1p

Din ipoteză se știe că ab+bc+ca=1 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{bc+ca}{a+b}+\frac{ab+ca}{b+c}+\frac{ab+bc}{c+a}\geq\sqrt{3} \Leftrightarrow c+a+b\geq\sqrt{3}\,\Big|^{2}\Rightarrow$$ ……………......…….2p

$$\Rightarrow \quad a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geq 3,$$

dar ab+bc+ca=1 $\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq 1$

Din ab+bc+ca=1 $\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq$ ab+bc+ca……………………….....................……2p

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$ (A)...2p

Propunător, prof. Haiduc Sorina, CNSB , Şimleu Silvaniei

NOTĂ:Pentru orice altă soluție corectă se acordă punctajul maxim aferent problemei.